PROBLÈME 1

Partie I

1. Rappeler la définition de :
   (a) Élément d'ordre fini d'un groupe $(G, .)$ et ordre de cet élément.
   (b) Groupe monogène.
   (c) Groupe cyclique.
2. Existe-t-il un sous-groupe cyclique du groupe $(\mathbb{Z}, +)$?
3. Donner tous les sous-groupes cycliques de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
4. Quelle est la forme général d'un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$? (on ne demande pas de preuve).
5. On munit $\mathbb{Z}^2$ de la loi + définie par $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.
   (a) Démontrer que $(\mathbb{Z}^2, +)$ n'est pas monogène.
   (b) Montrer que $H_1 = \mathbb{Z} \times \{0\} = \{(x, 0)/x \in \mathbb{Z}\}$ et $H_2 = \{0\} \times \mathbb{Z} = \{(0, x)/x \in \mathbb{Z}\}$ sont deux sous-groupes de $(\mathbb{Z}^2, +)$ et que H_1 et H_2 sont isomorphes. sont-ils monogènes ?
6. On note φ l'indicatrice d'Euler. Calculer $\varphi(63000)$.

Partie II

Un groupe $(H, \star)$ est dit trivial si H est un singleton, c'est-à-dire $H = \{e\}$.On considère deux groupes $(G_1, .)$ et $(G_2, .)$ non triviaux et on note e_1 et e_2 leurs éléments neutres respectifs. Soit $G = G_1 \times G_2$ muni de la loi de composition interne $\star$ tel que :

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in G, \quad (x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

1. On suppose que G est monogène et soit $g = (g_1, g_2) \in G$ tel que $G = \langle g \rangle$.
   (a) Démontrer que $G_1 = \langle g_1 \rangle$ et $G_2 = \langle g_2 \rangle$.
   (b) Démontrer que pour tout $k \in \{1, 2\}$, on a g_k est d'ordre fini dans G_1. En déduire que G_k et G_2 sont cycliques.
   (c) Énoncer le résultat démontré dans cette question.
2. Montrer que si G_1 et G_2 sont cycliques et $\text{card}(G_1) = n_1$ et $\text{card}(G_2) = n_2$ alors le groupe $G = G_1 \times G_2$ est cyclique si et seulement si $n_1 \wedge n_2 = 1$ et préciser un générateur de G.
3. On suppose que G_1 et G_2 sont cycliques et $\text{card}(G_k) = n_k$, pour tout $k \in \{1, 2\}$ et que $n_1 \wedge n_2 = 1$. Quel est le nombre de générateurs du groupe cyclique $G = G_1 \times G_2$?

Partie III

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif, $\mathcal{I}$ une partie de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{I}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{A}, +)$ et $\forall (a, x) \in \mathcal{A} \times \mathcal{I}, \quad ax \in \mathcal{I}$

1. Soit $x \in \mathcal{A}$. On pose $x\mathcal{A} = \{xa, a \in \mathcal{A}\}$. Montrer que $x\mathcal{A}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.

   Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{I}$ est principal s'il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{I} = x\mathcal{A}$.
2. Montrer que tout idéal de $\mathbb{Z}$ est principal. (Ce résultat figure dans le cours mais on demande de *refaire la preuve.*)

   On travaille maintenant dans l'anneau produit $\mathbb{Z}^2$. On rappelle que ses lois sont définies par :

$$\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2, \forall (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad \begin{cases} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 \times x_2, y_1 \times y_2) \end{cases}$$

3. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{Z}^2$. On pose

$$\mathcal{I}_1 = \{x \in \mathbb{Z}/(x,0) \in \mathcal{I}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_2 = \{y \in \mathbb{Z}/(0,y) \in \mathcal{I}\}.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$.
   (b) En déduire que $\mathcal{I}$ est principal.

4. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on pose $A_d = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2, d \mid y - x\right\}$
   (a) Préciser A_0 et A_1.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel d, A_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
   Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$, distinct de A_0.
   (c) Montrer que l'ensemble $I = \{n \in \mathbb{N}^*/(0,n) \in A\}$ est non vide. On note d son plus petit élément.
   (d) Montrer que $A = A_d$.

PROBLÈME 2

Définitions , notations

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel non nul.

1. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, on définit :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E, f^{k+1} = f^k \circ f$$

   Donc si $k \neq 0$ alors f^k est le composé de f avec lui même k fois.

   Un sous-espace vectoriel F de E est dit $u-$stable si et seulement si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire : $\forall x \in E, x \in F \Rightarrow u(x) \in F$.

2. On appelle **drapeau** de E toute famille $\mathcal{D} = (E_k)_{k\in[\![0,p]\!]}$ de sous-espaces vectoriels de E tel que : $p \in \mathbb{N}^*$ et $\{0\} = E_0 \subsetneq \cdots \subsetneq E_p = E$. Les $p+1$ sous-espaces vectoriels $E_k, k \in [\![0,p]\!]$ sont appelés les termes du drapeau $\mathcal{D}$. Si E est de dimension n et $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle base de E, adaptée au drapeau $\mathcal{D}$ toute base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E tel que :

$$(\forall k \in [\![1,p]\!])(\exists s \in [\![1,n]\!]) \quad E_k = \mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_s\}$$

   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dira que le drapeau $\mathcal{D}$ est stable par u ou $u-$stable si tous les termes E_k du drapeau $\mathcal{D}$ sont $u-$stables.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est ponctuellement nilpotent si pour tout $x \in E$ il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p(x) = 0$. On dit que u est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. Si u est nilpotent, le plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de u.
   Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si l'endomorphisme Φ_A canoniquement associé à A est nilpotent. L'indice de nilpotence de A est celui de Φ_A. On note $\mathscr{N}_E$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de E. C'est donc une partie de $\mathcal{L}(E)$.

4. On admet le théorème de la base incomplète pour tout $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E même s'il n'est pas de dimension finie. En particulier, tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire.

Partie I : Trace d'un endomorphisme en dimension finie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension n. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on pose : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Le scalaire $\mathrm{tr}(A)$ est appelé la trace de A.

1. Démontrer que l'application tr qui associe à chaque matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sa trace est une application linéaire.

2. Prouver que : $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. En déduire que si deux matrices carrée sont semblables alors elles ont même trace.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathscr{B}$ une base de E et $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$. On définit $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(A)$. Justifier que cette définition a un sens et donner les propriétés correspondantes de la trace d'un endomorphisme.

Partie II : Drapeaux

Dans tout ce qui suit E est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel non nul.

1. (a) Démontrer que E admet un et un seul drapeau à deux termes.
   (b) Démontrer que si E n'est pas de dimension finie alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, E admet un drapeau $\mathcal{D}_m$ à $m+1$ termes.
   (c) Démontrer que si $\dim(E) = n$ alors pour tout $m \in [\![1,n]\!]$ il existe un drapeau $\mathcal{D}_m$ de E à $m+1$ termes et que $n+1$ est le maximum du nombre de termes d'un drapeau de E.
2. On suppose dans toute cette question que E est de dimension finie n avec $n \neq 0$.
   (a) Démontrer que tout drapeau $\mathcal{D}$ de E admet au moins une base adaptée.
   (b) Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Démontrer que pour tout $m \in [\![1,n]\!]$ il existe un drapeau de E à $m+1$ termes tel que $\mathscr{B}$ est une base adaptée à $\mathcal{D}$.
   (c) Soit $\mathcal{D} = (E_k)_{k\in[\![0,p]\!]}$ un drapeau de E et $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base adaptée à $\mathcal{D}$. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, justifier l'unicité de $s \in [\![1,n]\!]$ tel que : $E_k = \mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_s\}$. Que représente s pour E_k ?
   (d) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{D}$ un drapeau $u-$stable et $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à $\mathcal{D}$. Décrire la forme de la matrice de u relativement à $\mathscr{B}$.

Partie III : Noyaux itérés

Soit E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que la suite $(\ker f^k)_{k\in\mathbb{N}}$, des noyaux des endomorphismes f^k pour $k \in \mathbb{N}$ est, au sens de l'inclusion, une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E, c'est-à-dire :
$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \ker f^k \subset \ker f^{k+1}$$
2. Montrer que s'il existe un entier p tel que les noyaux des endomorphismes f^p et f^{p+1} soient égaux, alors : $\forall k \geq p : \ker f^k = \ker f^p$
3. Montrer que lorsque l'espace E est de dimension finie n, la suite des dimensions des noyaux des endomorphismes f^k est constante à partir d'un rang p inférieur ou égal à la dimension n de l'espace. En déduire en particulier $\ker f^n = \ker f^{n+1}$
4. **Application :**
   On considère la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$
   On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer $N_k = \ker f^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Determiner une base $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que : $\omega_1 \in N_1$ et $\omega_2 \in N_2$ et ω_3 est un vecteur de la base canonique judicieusement choisi.
   (c) En déduire que la matrice A est semblable à une matrice A' de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On demande de donner les valeurs de a, b et c, déterminer la matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base Ω ainsi que P^{-1} et d'écrire la relation qui lie A et A'.

Partie IV : Endomorphismes nilpotents

1. Montrer que si E est de dimension finie alors tout endomorphisme ponctuellement nilpotent est nilpotent.
2. Donner un exemple d'endomorphisme ponctuellement nilpotent mais non nilpotent.
3. Démontrer que si u et v sont deux endomorphismes nilpotents tel que $u \circ v = v \circ u$ alors $u + v$ et $u \circ v$ sont nilpotents.
4. Démontrer que si E est de dimension finie n avec $n \geq 2$ alors l'ensemble $\mathscr{N}_E$ des endomorphismes nilpotents n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
5. On suppose que E est de dimension finie n et on considère $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si u est nilpotent d'indice de nilpotence p alors $p \leq n$. En déduire que $u^n = 0$
6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence p. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, on pose : $N_k = \ker(u^k)$.
   (a) Prouver que $\mathcal{D} = (N_k)_{k \in [\![0,p]\!]}$ est un drapeau de E, stable par u.
   (b) Soit $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à $\mathcal{D}$. Démontrer que la matrice de u relativement à $\mathscr{B}$ est une matrice triangulaire strictement supérieure.
   (c) En déduire que tout endomorphisme nilpotent de E est de trace nulle.

Partie V : Sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{N}_E$

Dans cette partie :

- n est un entier naturel tel que $\boxed{n \geq 2.}$
- E est un espace vectoriel de dimension n.
- $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est la partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée des matrices nilpotentes.
- $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ est la partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée des matrices de trace nulle.
- $\mathcal{N}_E$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de E.
- $\mathcal{H}_E$ l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle de E.
- $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On se propose de prouver que $\text{Vect}(\mathcal{N}_E) = \mathcal{H}_E$.

1. Justifier que $\mathcal{H}_E$ est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?. Qu'appelle-t-on un tel sous-espace vectoriel ?
2. Prouver que pour toute valeur de l'entier n tel que $n \geq 2$, la partie $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $I = [\![1, n]\!]^2 \backslash \{(1,1)\}$ et pour tout $(i,j) \in I$, on pose : $\begin{cases} F_{ii} = E_{ii} - E_{11} & \text{si} \quad i \geq 2 \\ F_{ij} = E_{ij} & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$.
   (a) Démontrer que $(F_{ij})_{(i,j) \in I}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) Que vaut la trace de F_{ij} pour tout $(i,j) \in I$?
4. Déduire de ce qui précède le résultat souhaité.
5. Ce résultat reste-t-il vrai si $n = 1$?